Problem B
Castle Design
Algorithm 해설

직교 다각형의 임의의 정점을 시작으로 경계를 반시계 방향으로 따라가면서 볼록 정점에는 왼쪽 회전을 나타내는 심볼 L을, 오목 정점에는 오른쪽 회전을 나타내는 심볼 R을 지정하면, L과 R로 구성된 방향전환 문자열 (turn sequence)을 정의할 수 있다. 직교 다각형의 정점 수를 n이라면, L의 개수는 $n/2+2$ 개이고 R의 개수는 $n/2-2$ 개가 된다. 그리고 L의 개수는 R의 개수보다 항상 4개 더 많다. 반대로 L의 개수가 R의 개수보다 4개 더 많은 LR-문자열이 주어지면, 해당 방향전환 문자열을 따르는(realizing) 직교 다각형을 그릴 수 있다. 각 정점이 정수 좌표를 갖도록 한다면, 면적이 가장 작거나 둘레가 가장 작은 직교 다각형을 그리는 최적화 문제가 정의된다. 최소 면적 또는 최소 둘레를 갖는 직교 다각형을 계산하는 문제는 매우 어려운 문제로 NP-hard임이 증명되어 있다. 그런데 단조(monotone) 직교 다각형에 대한 문자열이 주어지면 최소 면적 또는 둘레를 갖는 직교 다각형을 그리는 문제는 다항시간에 계산할 수 있다. 두 축 모두 단조한 방향전환 수열을 2-단조 수열라 정의하고, 한 축에만 단조하고 (다른 축에는 단조하지 않은) 방향전환 수열을 1-단조 수열이라 정의한다.

본 문제에서는 1-단조 또는 2-단조 반향전환 수열이 입력으로 주어질 때, 수열을 따르는 직교 다각형의 최소 둘레를 계산해서 출력하는 것이다. 2-단조이면 $O(n)$, 1-단조이면 $O(n^2)$ 시간에 해결 가능하다.

x-축 단조 직교 다각형을 위, 아래 두 단조한 체인으로 분할할 수 있는데, 그 중에서 정점 개수가 더 많은 체인을 위쪽 체인 T라고 하고, 아래 체인을 B라 하자. 한 축에 단조하다는 사실로부터 다음 두 성질을 만족하는 최소 둘레의 직교 다각형이 항상 존재함을 어렵지 않게 알 수 있다.

1. T와 B의 모든 수직 선분의 길이가 1인 최소 둘레 직교 다각형이 존재한다.
2. T의 모든 수평 선분의 길이가 1인 최소 둘레 직교 다각형이 존재한다.

T의 모든 수평 선분의 길이가 1이므로 직교 다각형의 폭(width)은 T의 수평 선분의 개수로 고정된다. 이에 따라 B의 폭도 같은 길이로 정해진다. 성질 1에 의해, T와 B의 수직 선분의 개수만큼 둘레 값에 포함된다. 결정되지 않은 길이는 가장 왼쪽 수직 선분과 가장 오른쪽 수직 선분의 길이 뿐이지만 단조한 성질을 이용하면 어렵지 않게 계산할 수 있다.

우선 2-단조한 경우의 최소 둘레 값은 위의 두 성질과 두 축에 모두 단조하다는 사실로부터 아래와 같은 식으로 정리할 수 있다. (두 축에 단조한 직교 다각형은 4개의 사분면에 계단 모양 체인이 차례로 연결되어 있는 모양이다. 4개의 사분면에 포함된 R의 개수를 1-사분면부터 차례대로 r_1, r_2, r_3, r_4라 표기하자. 이 값은 0일 수도 있음에 유의하자.) 따라서, $O(n)$ 시간에 해결할 수 있다.

1. $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$인 경우: `LLLL`이므로 변의 길이가 1인 정사각형이 되어 최소 둘레 길이는 4
2. $r_1 = r_3$, $r_2 = r_4 = 0$ 인 경우: 최소 둘레의 길이는 $4r_1 + 6$ (특별한 경우)
3. $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = r_4$ 인 경우: 최소 둘레의 길이는 $4r_2 + 6$ (특별한 경우)
4. 위 세 가지 경우가 아니라면: 최소 둘레의 길이는 $3(r_1 + r_2) + (r_3 + r_4) + |r_3 - (r_1 - r_2 + r_4)| + 4$

만약, 1-단조 수열이라면, 동적계획법 알고리즘으로 $O(n^2)$ 시간에 해결할 수 있다. 더 빠른 방법이 존재하지만, $O(n^2)$ 시간 알고리즘을 정해로 채점했다. $A[i][j]$를 $T[0..i]$ 체인과 $B[0..j]$ 체인으로 정의되는 1-단조 다각형의 최소 둘레 길이로 정의하면, 위쪽 체인의 i번째 수평선분과 아래쪽 체인의 j번째 수평선분 끝 점의 방향에 따라, $A[i][j]$를 $A[i-1][j-1]$과 $A[i-1][j]$의 점화식으로 (그렇게 어렵지 않게) 표현할 수 있다. 물론, $A[i][j]$를 최소 둘레를 갖는 1-단조 다각형의 가장 왼쪽 수직 선분의 길이로 정의해도 된다. A를 채운 후, 오른쪽 수직 선분의 길이를 $O(n)$ 시간에 계산할 수 있기 때문에, 다각형 전체의 (최소) 둘레 역시 선형시간에 계산이 가능하다.